План лекции:

«Колебания прямоугольной мембраны»

Составитель: Соловенко В.Г.

**Тема**: Колебания прямоугольной мембраны

**План:**

1. Получение уравнения поперечных колебаний прямоугольной мембраны;
2. Решение уравнения колебаний однородной мембраны

**Литература:**

* Владимиров В.С. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1981.
* Кошляков Н. C., Глинер Э. Б., Смирнов М. М. Уравнения в частных производных математической физики. – М.: Высшая школа, 1970.
* Михлин С. Г. Курс математической физики. – М.: Наука, 1968.
* Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1977.

**План-конспект:**

## Получение уравнения поперечных колебаний прямоугольной мембраны

Мембраной называется плоская пленка, не сопротивляющаяся изгибу и сдвигу. Рассмотрим мембрану, натянутую на плоский контур . Будем изучать поперечные колебания мембраны, в которых смещение перпендикулярно к плоскости мембраны.

Пусть — элемент дуги некоторого контура, взятого на поверхности мембраны и проходящего через точку На этот элемент действует натяжение, равное . Вектор Т вследствие отсутствия сопротивления изгибу и сдвигу лежит в касательной плоскости к мгновенной поверхности мембраны и перпендикулярен к элементу .

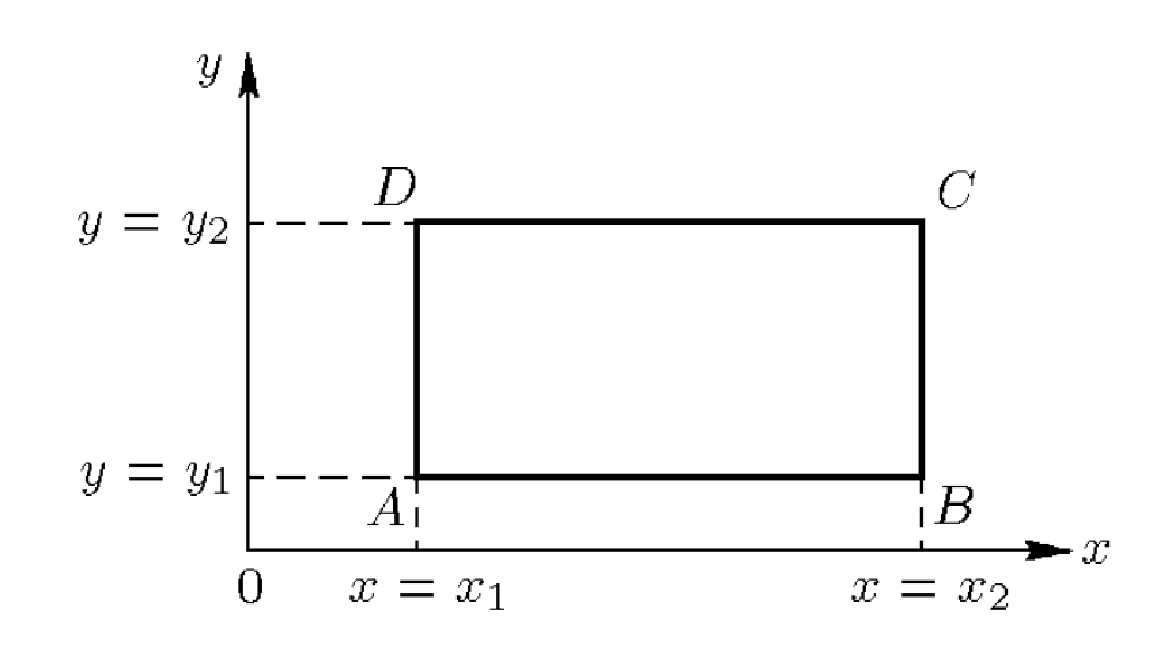
Можно показать, что отсутствие сопротивления сдвигу приводит к тому, что величина натяжения не зависит от направления элемента , так что вектор натяжения является функцией , и Эти свойства вектора служат математическим выражением отсутствия сопротивления изгибу и сдвигу.

Будем изучать малые колебания мембраны, пренебрегая квадратами первых производных и , где функция определяет форму мембраны в момент времени . Из этого предположения сразу же следует, что — проекция натяжения на плоскость —равна абсолютной величине натяжения. В самом деле, при любой ориентации дуги угол между вектором и плоскостью не превосходит угла образуемого нормалью к поверхности мембраны в точке

с осью . Поэтому

Т.е. , и

Вертикальная составляющая натяжения, очевидно, равна:



Выделим на поверхности мембраны элемент площади, проекция которого на плоскость является прямоугольником со сторонами, параллельными осям координат (см. рисунок). На этот элемент действует сила натяжения, равная

В силу отсутствия перемещения вдоль осей ж и у проекции на эти оси равны нулю:

Пользуясь теоремой о среднем и учитывая произвол в выборе площади

*ABCD*, получаем:

т.е. натяжение не меняется при изменении жир может зависеть лишь от .

Площадь какого-либо элемента мембраны в момент времени равна в нашем приближении

Следовательно, в процессе колебаний не происходит растяжения, откуда в силу закона Гука вытекает независимость натяжений от времени. Таким образом, мы установили, что натяжение не зависит от переменных , и :

Перейдем к выводу уравнения колебаний мембраны. Воспользуемся теоремой о приращении количества движения. Пусть —проекция на плоскость некоторого участка мембраны, а —граница . Приравнивая изменение количества движения импульсу вертикальных составляющих сил натяжения и внешних действующих сил с плотностью , получаем уравнение колебаний мембраны в интегральной форме

где —поверхностная плотность мембраны, a – плотность внешней силы (на единицу площади).

Для перехода к дифференциальному уравнению предположим, что функция имеет непрерывные вторые производные. С помощью теоремы Остроградского — Гаусса контурный интеграл преобразуется в поверхностный:

вследствие чего интегральное уравнение колебаний приводится к виду

Пользуясь теоремой о среднем, произвольностью выбора и промежутка времени , делаем заключение о тождественном равенстве нулю выражения в фигурных скобках. Таким образом, приходим к дифференциальному уравнению колебаний мембраны

Для однородной мембраны уравнение колебаний можно записать в виде

Где —плотность силы, рассчитанная на единицу массы мембраны.

## Решение уравнения колебаний однородной мембраны

Как было показано, процесс колебаний плоской однородной мембраны описывается уравнением

Пусть в плоскости (ж, у) расположена прямоугольная мембрана со сторонами и , закрепленная по краям и возбуждаемая с помощью начального отклонения и начальной скорости. Для нахождения функции , характеризующей отклонение мембраны от положения равновесия, мы должны решить уравнение колебаний

при заданных начальных условиях:

и граничных условиях:

Мы ищем, как обычно, решение методом разделения переменных, полагая

Подставляя это соотношение в исходное уравнение и разделяя переменные, получим уравнение для :

а для функции — следующую краевую задачу:

Таким образом, сама задача для собственных значений состоит в решении однородного уравнения в частных производных при однородных граничных условиях. Будем и эту задачу решать методом разделения переменных, полагая

Проводя разделение переменных, получаем следующие одномерные задачи на собственные значения:

где — постоянные разделения переменных, связанные соотношением . При этом граничные условия для и вытекают из соответствующих условий для функции . Например, из

следует , так как (мы ищем нетривиальные решения).

Решения уравнений для имеют вид:

Собственным значениям

таким образом, соответствуют собственные функции

где — некоторый постоянный множитель. Выберем его так, что-

бы норма функции с весом 1 была равна единице:

Отсюда

Функции

образуют ортонормированную систему собственных функций прямоугольной мембраны.

Число собственных функций, принадлежащих (кратность ), зависит от количества целочисленных решений пит уравнения

Мы видим, что частные решения:

представляют собой стоячие волны, профиль которых определяется собственными функциями . Геометрические места точек внутри прямоугольника, в которых собственные функции обращаются в нуль, называются **узловыми линиями**.

Искомое решение уравнения имеет вид:

Коэффициенты и определяются из начальных условий: